Equação de primeiro grau

Definição:. *Uma equação de primeiro grau em x é aquela que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$ onde a e b são números reais com $a \neq 0$.*

Observação: Sua resolução é

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\tfrac{b}{a}.$$

Na primeira passagem, somou-se aos dois membros $-b$; na segunda, dividiram-se aos dois membros por $a (a \neq 0)$.

Exemplos:

1) Resolva: $2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2$.

   Solução:

$$\begin{aligned}
&2(2x-3)+3(x+1) = 5x+2 \\
&4x - 6 + 3x + 3 = 5x + 2 \quad \text{(p. distributiva)} \\
&7x - 3 = 5x + 2 \quad \text{(somando termos s.)} \\
&2x = 5 \quad \text{(somando -5}x\text{ e +3)} \\
&x = \frac{5}{2}. \quad \text{(dividindo por } 2 \neq 0\text{)}
\end{aligned}$$

2) Resolva: $\frac{5y-2}{8} = 2 + \frac{y}{4}$.

   Solução:

$$\begin{aligned}
&\frac{5y-2}{8} = 2 + \frac{y}{4} \quad \text{(mmc \{8,4\} =8)} \\
&8 \cdot \left(\frac{5y-2}{8}\right) = 8 \cdot \left(2 + \frac{y}{4}\right) \text{(multiplicando por 8)} \\
&5y - 2 = 16 + 2y \text{ (Justifique)} \\
&3y = 18 \quad \text{(somando -2}y\text{ e +2)} \\
&y = 6. \quad \text{(dividindo por 3)}
\end{aligned}$$

I Equação modular

Definição:. *Uma equação modular é aquela cuja incógnita se apresenta em módulo.*

Módulo de $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0. \end{cases}$

Exemplo:

3) Resolva: $|2x - 1| = 6$.

Solução:
Usando a definição de módulo temos:
$+(2x-1) = 6 \text{ ou } -(2x-1) = 6, assim$
$x = \frac{7}{2}$
ou
$x = -\frac{5}{2}.$

II Equação de segundo grau

Definição:. *Uma equação de segundo grau em x é aquela que pode ser escrita na forma:*

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ onde } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Resolução algébrica de equações quadráticas:
A equação de segundo grau pode ser resolvida geralmente usando a fórmula de Bhaskara. Observe o processo de completação de quadrados para obtê-la. Considere a Equação: $ax^2 + bx + c = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}\\
&\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}\\
&\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{(Bhaskara)}
\end{aligned}$$

Exemplos:

1) Resolva: $3x^2-6x-5=0$.

   Solução: Veja que neste caso a=3, b=-6 e c=-5, logo usando a fórmula de Bhaskara temos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3}\\
&= \frac{6\pm\sqrt{96}}{6}\\
&= \frac{6\pm 4\sqrt{6}}{6}\\
&= \frac{3\pm 2\sqrt{6}}{3}
\end{aligned}$$

   Assim:

$$x_1=\frac{3+2\sqrt{6}}{3} \text{ e } x_2=\frac{3-2\sqrt{6}}{3}.$$

2) Resolva a equação anterior completando quadrados e compare ambos os resultados: Dividindo por 3 em ambos os lados temos:

$$x^2 - 2x - \frac{5}{3} = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = \frac{5}{3} + 1 \quad \text{(somando 5/3 e 1)}$$
$$(x-1)^2 = \frac{8}{3}$$
$$x - 1 = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} \quad \text{(Justifique)}$$

Assim:

$$x_1 = 1 + \sqrt{\frac{8}{3}} \text{ e } x_2 = 1 - \sqrt{\frac{8}{3}}$$

3) Resolva $2x^2 - 6x = 0$.

Solução:

$$\begin{aligned} \text{Note que se } x_1 \cdot x_2 &= 0 \\ \text{então } x_1 &= 0 \\ \text{ou } x_2 &= 0, \\ 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-3) &= 0. \end{aligned}$$

Assim $2x = 0$ ou $x - 3 = 0$, logo $x = 0$ ou $x = 3$

Inequações

III Inequações de 1º grau

As inequações do 1º grau possuem uma das seguintes formas gerais

$$ax + b \leq 0$$
$$ax + b < 0$$
$$ax + b \geq 0$$
$$ax + b > 0$$

para certos $a, b \in \mathbb{R}$ dados, com $a \neq 0$.

A principal diferença entre as equações de 1º grau e as inequações de 1º grau é que a equação possui uma única solução enquanto que a inequação possui infinitas soluções, que formam um intervalo real.

IV Inequações de 2º grau

As inequações do 2º grau possuem uma das seguintes formas gerais

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c > 0$$

para certos $a, b, c \in \mathbb{R}$ dados, com $a \neq 0$.

A principal diferença entre as equações de 2º grau e as inequações de 2º grau é que a equação, quando possui solução tem uma ou duas soluções, enquanto que a inequação quando possui solução possui infinitas soluções, que representam um intervalo real ou a união de dois intervalos reais.

V Inequações modulares

As inequações modulares possuem uma das seguintes formas gerais

$$|f(x)| \leq k$$
$$|f(x)| < k$$
$$|f(x)| \geq k$$
$$|f(x)| > k$$

Onde:

- $f(x)$ é uma função ou expressão algébrica.
- k é um número real não negativo ($k \geq 0$).

A resolução consiste em eliminar o módulo.

Exemplos:

1) Resolva $3(x-1)+2 \geq 5x+6$.

Solução:

$$\begin{aligned}
&3(x-1)+2 \geq 5x+6\\
&3x-3+2 \geq 5x+6\\
&3x-5x \geq 6+3-2\\
&-2x \geq 7\\
&x \leq -\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Resposta: $x \in (-\infty, -\frac{7}{2}]$.

2) Resolva $|2x-1| < 5$.

Solução:

$$\begin{aligned}
|2x-1| \leq 5 &\Leftrightarrow -5 \leq 2x-1 \leq 5\\
&\Leftrightarrow -4 \leq 2x \leq 6\\
&\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3
\end{aligned}$$

Resposta: $x \in [-2, 3]$.

3) Resolva $|\frac{3-2x}{2}| + 3 > 5$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3-2x}{2}\right| + 3 > 5 &\Leftrightarrow \left|\frac{3-2x}{2}\right| > 2\\
&\Leftrightarrow \frac{3-2x}{2} > 2 \text{ ou } \frac{3-2x}{2} < -2\\
&\Leftrightarrow 3-2x > 4 \text{ ou } 3-2x < -4\\
&\Leftrightarrow -2x > 1 \text{ ou } -2x < -7\\
&\Leftrightarrow x < -1/2 \text{ ou } x > 7/2
\end{aligned}$$

Resposta: $x \in [-\infty, -1/2] \cup [7/2, +\infty)$.

4) Resolva $(x-3)(x+1) \geq 0$.

Solução:

Caso 1: $x - 3 \geq 0 \quad e \quad x + 1 \geq 0$

assim $x \geq 3ex \geq -1$

por tanto, a solução do caso 1: $x \in [3, +\infty)$.

Caso 2: $x - 3 \leq 0 \quad e \quad x + 1 \leq 0$

assim $x \leq 3ex \leq -1$

por tanto, a solução do caso 2: $x \in (-\infty, -1]$

Solução final: $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

VI Exercícios

Resolva:

1) $\frac{2x-3}{4} + 5 = 3x$.

2) $\frac{t+5}{8} - \frac{t-2}{2} = \frac{1}{3}$.

3) $\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{4x^2-16}{2(x-2)}$

4) $|x + 1| = 2x - 3$.

5) $|2x - 3| = x^2$.

6) $4(u + 1)^2 = 16$.

7) $x^2 - 2x + 6 = 2x^2 - 6x - 26$.

8) $x(x + 5) = 12$.

9) Resolva completando quadrados:

   a) $x^2 + 5x - 9 = 0$

   b) $4 - 6x = x^2$.

10) $\frac{1}{2}(x + 3) + 2(x - 4) < \frac{1}{3}(x - 3)$.

11) $-3 < \frac{2x+5}{3} \leq 5$.

12) $7 - |x-3| \geq 3$

13) $|x+1| < |x+3|$

14) $2x - 3 \geq |x-4|$.

15) Resolva usando as propriedades VIII) ou IX)

a) $x^2 - 8x + 16 \geq 0$

b) $21 + 4x - x^2 > 0$.

16) Determine os valores de a e b para os quais a equação $ax + 1 = x + b$:

a) possui uma única solução.

b) não possui solução.

c) é satisfeita para qualquer valor de x.

17) Vários jogos da Copa do Mundo de 1994 ocorreram no estádio da Universidade de Stanford, Califórnia. O campo está 30 yardas mais longo do que a sua largura e a área do campo é de 8800 yardas. Quais são as dimensões deste campo de futebol? (1 m=1,0936 yardas)

Bibliografia:

Demanda, F. D.; Waits, B. K.; Foley, G. D.; Kennedy, D.**Pré-Cálculo.** São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. Cap. 5 e 6.