Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

Números Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Números Racionais: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\}$.

Números Irracionais: $\mathbb{I} = \{a | a \notin \mathbb{Q}\}$.

Números Reais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Números Complexos: $\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$.

Se $a = 0$ então z é dito um número complexo imaginário puro, se $b = 0$ então $z \in \mathbb{R}$.

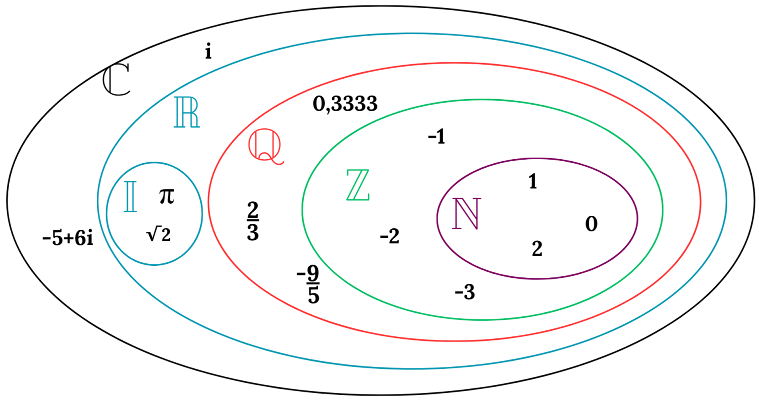

Figura 1.1: Representação dos conjuntos numéricos.

Observação: Quando relacionamos um elemento e um conjunto, utilizamos os símbolos $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence). Já para relações entre dois conjuntos, utilizamos $\subset$ (contido) ou $\not\subset$ (não contido).

Exemplos:

a) $1 \in \mathbb{N}$

b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

I Potenciação

A potenciação a^n, para $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, consiste na multiplicação sucessiva de um número real a por ele mesmo, n vezes.

Definida, para uma base $a \in \mathbb{R}$ e um expoente $n \in \mathbb{N}^*$, por:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}} \; .$$

A base a é o número que será multiplicado, e o expoente n indica o número de vezes que a base é multiplicada. Lê-se: a elevado a n.

I.1 Propriedades da Potenciação

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a, b \neq 0$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$. As propriedades de potência são:

1. **Expoente zero:** A extensão do conceito de potência para expoente $n = 0$, é definida por:
$$a^0 = 1, \quad (a \neq 0)$$
[1.1] Se $a = 0$ e $n = 0$, teremos 0^0 que é uma indeterminação, ou seja, não existe esta conta.
[1.2] Se $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}$ com $n \neq 0$, então $0^n = 0$.

2. **Expoente igual a 1:**
$$a^1 = a$$

3. **Produto de potências de mesma base:**
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

4. **Potência de uma potência:**
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

5. **Potência de um produto:**
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

6. **Quociente de potências de mesma base:** para $m \geq n$;
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a \neq 0)$$

O conceito de potenciação pode ser extendido para o caso em que o expoente $n \in \mathbb{Z}$, mantendo todas as propriedades descritas acima, esta extensão será feita usando a seguinte "transformação":
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad (a, b \neq 0, \quad n > 0)$$

implicando no acréscimo das seguintes propriedades:

7. **Potência de um quociente:**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad (b \neq 0)$$

8. **Quociente de potências de mesma base:** para $m < n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a \neq 0)$$

9. **Expoente negativo:** para $n \in \mathbb{N}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad (a \neq 0)$$

Podemos também extender este conceito para expoente racional $\mathbb{Q}$, neste caso a potenciação passa a ser tratada como radiação, ou seja, extração de raíz de ordem n. Este tópico está detalhado na seção abaixo.

II Radiciação

Dando continuidade à potenciação para expoentes racionais, temos a operação de radiciação, o qual representa a extração de raízes de um número real. Em outras palavras, a radiciação é a forma de expressar potências com expoente fracionário. Podendo-se dizer que a radiciação é a operação inversa da potenciação.

Definição:. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, e $a \in \mathbb{N}$. Definimos:*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (a^{\frac{1}{n}})^m \ .$$

Lê-se: Raíz n-ésima de a^m.

Observações: A definição acima pode ser extendida para $a \in \mathbb{R}$, desde que, acrescentemos algumas condições extras. Como apresentado a seguir:

Para $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

- Se n for **par**, a raiz n-ésima de a só está definida em $\mathbb{R}$ se $a \geq 0$.

- Se n for **ímpar**, a raiz n-ésima está definida para todo $a \in \mathbb{R}$, inclusive para $a < 0$. Se $a < 0$ então, $\sqrt[n]{a}$ também será negativa.

Para $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

- Se m for **par**, a raíz está definida para $a \in \mathbb{R}$, uma vez que $a^m > 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

- Se m for **ímpar**, temos dois casos a considerar:

  n **par**, então $a^{\frac{m}{n}}$ estará definida somente quando, $a \geq 0$.

  n **ímpar**, no qual $a^{\frac{m}{n}}$ está definida para $a \in \mathbb{R}$.

Propriedades:

1. $\sqrt[n]{u}\,\sqrt[n]{v} = \sqrt[n]{uv}$

2. $\sqrt[n]{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}};\ v \neq 0$

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[nm]{u}$

4. $(\sqrt[n]{u})^n = u$

5. $\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m;\ m \neq n$

6. $\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u|; & \text{se n é par} \\ u; & \text{se n é ímpar} \end{cases}$

Simplificação de Expressões com Radicais:

Exemplos:

1. $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{2^4 5} = 2\sqrt[4]{5}$.

2. $\sqrt[4]{x^4 y^4} = \sqrt[4]{(xy)^4} = |xy|$.

III Racionalização

Considere a expressão racional $\dfrac{a}{\sqrt[n]{u^k}}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^*$ e, além disso, $0 \leq k < n$. A **racionalização do denominador** consiste em eliminar o radical do denominador multiplicando numerador e denominador por uma expressão conveniente:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{u^k}} = \frac{a}{\sqrt[n]{u^k}} \cdot \frac{\sqrt[n]{u^{n-k}}}{\sqrt[n]{u^{n-k}}} = \frac{a\sqrt[n]{u^{n-k}}}{\sqrt[n]{u^n}}.$$

Note que:

$$\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u|, & \text{se } n \text{ é par e } u \in \mathbb{R}; \\ u, & \text{se } n \text{ é ímpar e } u \in \mathbb{R}; \\ 0, & \text{se } u = 0. \end{cases}$$

Assim, para $u = 0$, tem-se diretamente $\sqrt[n]{0^k} = 0$, e a expressão $\dfrac{a}{\sqrt[n]{0^k}}$ não está definida.

Exemplos:

1. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
2. $\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}}\frac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{(xy)^2}}{\sqrt[5]{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{(xy)^2}}{y}$.

IV Expoentes Racionais

Seja $u \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $m \in \mathbb{Z}$. A **radiciação** pode ser expressa como uma potência de expoente fracionário:

$$\sqrt[n]{u^m} = u^{\frac{m}{n}}.$$

Observações:

- Se n é par, a expressão só é válida para $u \geq 0$, pois a raiz par de número negativo não é real.

- Se n é ímpar, u pode ser qualquer número real.
- Essa igualdade define a equivalência entre radiciação e potenciação com expoente racional.

Simplificação de Expressões com Potências:

Exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{(x^2y^9)^{\frac{1}{3}}(xy^2)}{xy} &= \frac{(x^{\frac{2}{3}}y^3)(xy^2)}{xy} \\ &= (x^{\frac{5}{3}}y^5)(x^{-1}y^{-1}) = x^{\frac{2}{3}}y^4.\end{aligned}$$

Simplificação de Expressões com Radicais:

Exemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2y} - \sqrt{y^3} &= \sqrt{(2x)^2y} - \sqrt{y^2y} \\ &= 2|x|\sqrt{y} - |y|\sqrt{y} \\ &= \sqrt{y}(2|x| - |y|).\end{aligned}$$

V Produtos Notáveis

1. $(u+v)(u-v) = u^2 - v^2$
2. $(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2$
3. $(u \pm v)^3 = u^3 \pm 3u^2v + 3uv^2 \pm v^3$
4. $u^3 \pm v^3 = (u \pm v)(u^2 \mp uv + v^2)$
5. Binômio de Newton: Para $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Nota: O $\binom{n}{k}$ é calculado da seguinte forma:

1. O número n é o expoente da potência, ou seja, quantas vezes o parêntese está sendo multiplicado.

2. O número k vai de 0 até n, e muda em cada termo da soma.

O número $\binom{n}{k}$, lê-se combinação de n elementos tomados de k a k, é calculado assim:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Como se calcula fatorial, para $n \in \mathbb{N}$:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$$

Ressaltamos que o calculo do fatorial tem duas propriedades importantes: $0! = 1$ e $1! = 1$.
Exemplo: Para $(a+b)^3$, temos $n = 3$, e os k vão de 0 até 3:

$$\binom{3}{0} = 1$$
$$\binom{3}{1} = 3$$
$$\binom{3}{2} = 3$$
$$\binom{3}{3} = 1$$

Então:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Exemplos de protudos notáveis:

a) $25x^2 - 36 = (5x)^2 - 6^2 = (5x+6)(5x-6)$.

b) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x-4)(x^2+4x+16)$.

VI Expressões Fracionárias

Exemplo: Vamos simplificar a equação $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$.

$$\frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x+3},$$

Note que, $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$, como não existe divisão por zero, esta equação está definida apenas para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, ou seja, $x \neq \pm 3$.

Exemplo: Como no exemplo anterior, iremos simplificar a expressão

$$\frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2-4}$$

fazendo a redução ao mesmo denominador:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2-4} &= \frac{2}{x(x-2)} + \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{2(x+2) + (x-2)(x+2) - 3x}{x(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{2x + 4 + x^2 - 4 - 3x}{x(x^2-4)} \\
&= \frac{x^2 - x}{x(x^2-4)} = \frac{x(x-1)}{x(x^2-4)} \\
&= \frac{x-1}{x^2-4}
\end{aligned}$$

Note que as expressões

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \quad \text{e} \quad x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

indicam valores de x que fazem com que o denominador seja nulo. Por isso, precisamos restringir o domínio da equação para evitar divisão por zero. Assim, a equação está definida apenas para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, ou seja, $x \neq 0, \pm 2$.

VII Exercícios

1. Complete com $\subset$, $\not\subset$, $\in$ ou $\notin$.

   a) $\mathbb{N}$ _____ $\mathbb{Z}$

   b) π _____ $\mathbb{Q}$

   c) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ _____ $\mathbb{Z}$

   d) $\frac{5}{2}$ _____ $\mathbb{Q}$

   e) $\mathbb{N}^*$ _____ $\mathbb{R}$

   f) $\frac{48}{6}$ _____ $\mathbb{N}$

2. Simplifique as expressões a seguir removendo fatores do integrando:

   a) $\sqrt{288}$

   b) $\sqrt[3]{500}$

   c) $\sqrt[3]{8x^6y^4}$

3. Racionalize o denominador:

   a) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$

   b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

   c) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

   d) $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}}$

4. Coverta as expressões para a forma exponencial:

   a) $\sqrt[3]{(a+2b)^2}$

   b) $\sqrt[5]{x^2y^3}$

   c) $xy\sqrt[4]{xy^3}$

5. Simplifique as expressões exponênciais:

   a) $\frac{a^{\frac{3}{5}}a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}}$

   b) $(x^2y^4)^{\frac{1}{2}}$

c) $\left(\frac{-8x^6}{y^{-3}}\right)^{\frac{2}{3}}$

6. Simplifique as expressões radicais:

   a) $\sqrt{9x^{-6}y^4}$

   b) $\sqrt[5]{\frac{4x^6y}{9x^3}}$

   c) $\sqrt{18x^2y} + \sqrt{2y^3}$

   d) $\sqrt[3]{\frac{4x^2}{y^2}}\sqrt[3]{\frac{2x^2}{y}}$

7. Fatore as expressões colocando o fator comum em evidência:

   a) $5x - 15$

   b) $5x^3 - 20x$

   c) $yz^3 - 3yz^2 + 2yz$

8. Fatore usando os produtos notáveis:

   a) $z^2 - 49$

   b) $16 - (x+2)^2$

   c) $36y^2 + 12y + 1$

   d) $y^3 - 8$

   e) $z^3 + 64$

   f) $2x^2 - 3xy + y^2$

9. Fatore completamente:

   a) $x^3 + x$

   b) $4x^3 - 20y^2 + 25y$

   c) $2x^3 - 16x^2 + 14x$

10. Simplifique as expressões:

   a) $\frac{18x^3}{x}$

   b) $\frac{75y^2}{9y^4}$

   c) $\frac{x^3}{x^2-2x}$

d) $\frac{y^3+4y^2-21y}{y^2-49}$

e) $\frac{3}{x-2} + \frac{x+1}{x-2}$

f) $\frac{3}{x^2+3x} - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2-9}$

g) $\frac{x+3}{x-1} \frac{1-x}{x^2-9}$

h) $\frac{4x}{y} \div \frac{8y}{x}$

Bibliografia:

Demanda, F. D.; Waits, B. K.; Foley, G. D.; Kennedy, D. **Pré-Cálculo.** São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. Cap. 1-4.