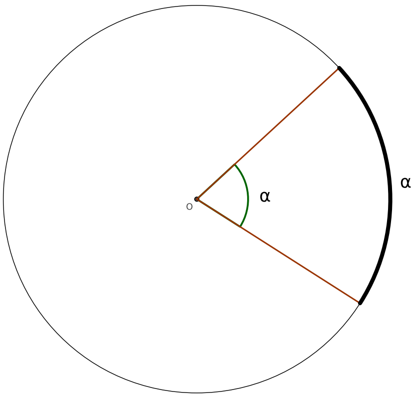
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Joinville

Curso de Nivelamento em Matemática Básica

Trigonometria

I. Ângulo

Seja uma circunferência de centro O e raio r,



α é chamado ângulo central e tem a mesma medida do arco de circunferência que ele determina.

Definição. *Grau ($^\circ$) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ do comprimento da circunferência que contém o arco a ser medido.*

Definição. *Radiano (rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido, isto é, corresponde a $\frac{1}{2\pi}$ da circunferência.*

Um ângulo pode ser medido em graus ou radianos; Estas medidas estão relacionados por:

$$2\pi = 360^\circ,$$

em que π é um número irracional e igual a 3,14159...

Exemplos:

1. Exprimir 160° em radianos:

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & — & \pi \text{ rad} \\ 160^\circ & — & x \text{ rad} \end{array}$$

Logo, $x = \dfrac{160\pi}{180} = \dfrac{8\pi}{9}$ rad.

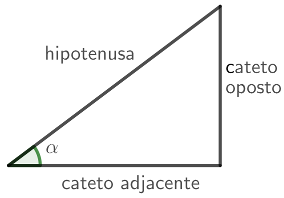
2. Exprimir $\dfrac{5\pi}{6}$ rad em graus:

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & — & \pi \text{ rad} \\ x^\circ & — & \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \end{array}$$

Portanto, $x = \dfrac{180 \cdot \frac{5\pi}{6}}{\pi} = 150^\circ$.

II. Trigonometria no triângulo retângulo

A seguir, apresentamos os conceitos essenciais da Trigonometria.



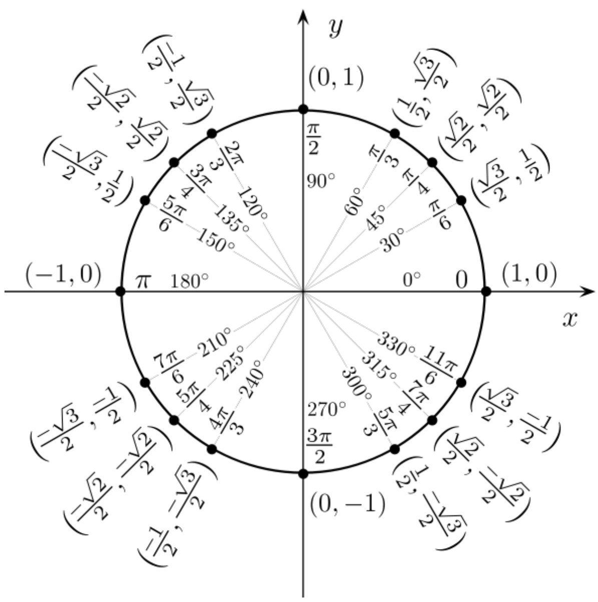
$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{cat.op.}{hip}$	$\cos \alpha = \dfrac{cat.adj.}{hip}$	$\tan \alpha = \dfrac{cat.op.}{cat.adj.}$

Os ângulos notáveis são apresentados na tabela a seguir. Com base nestes, veremos na próxima sessão que podemos calcular as funções trigonométricas em ângulos maiores que 90°

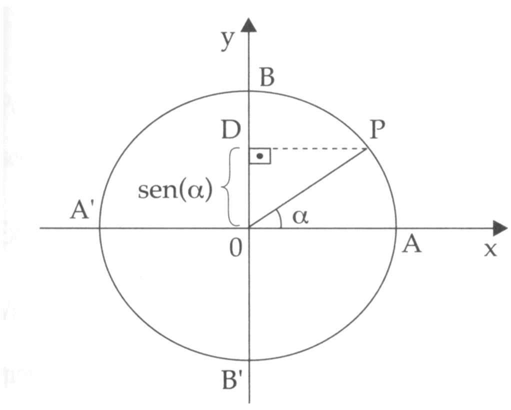
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\operatorname{sen} \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

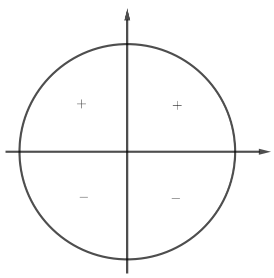
III. Circulo Trigonométrico

É um ciclo no sentido anti-horário (sentido positivo); sua origem é o ponto A; o centro da circunferência coincide com a origem do sistema cartesiano ortogonal; o raio da circunferência é igual a 1 unidade; os eixos dividem o círculo em 4 quadrantes.

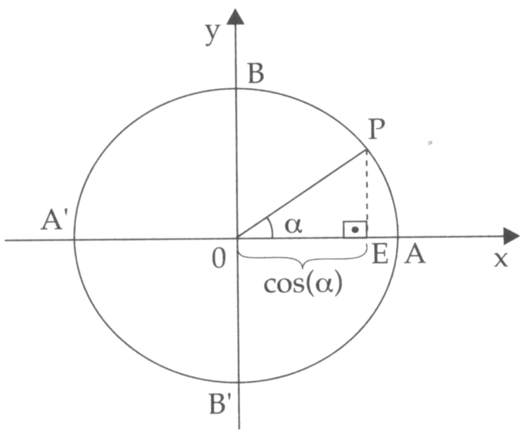


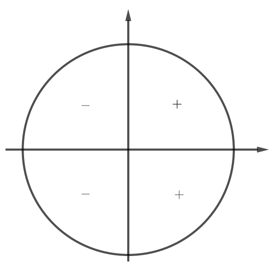
Definição. *Dado um ângulo α e um ponto P da circunferência, associado a α, fazemos a projeção desse ponto no eixo y e encontramos o ponto D. A medida $\overrightarrow{OD}$ é o seno de α ou, simplesmente, sen (α).*



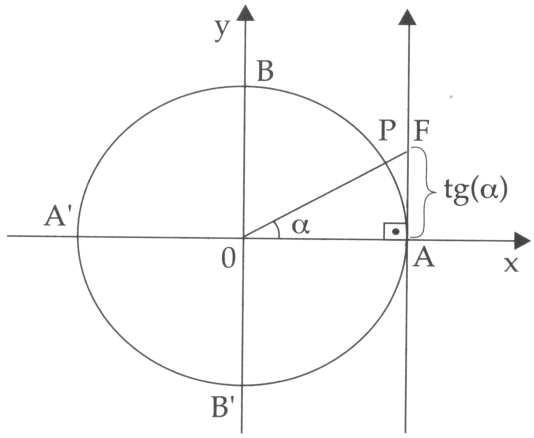


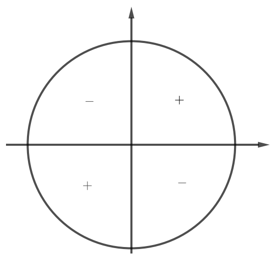
Definição. $\cos\alpha = \overrightarrow{OE} = E - O$



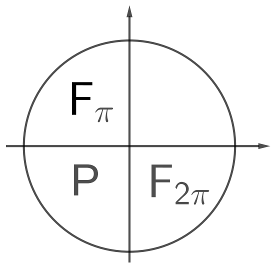


Definição. $\tan\alpha = \overrightarrow{AF} = F - A$





Para calcular o seno, o cosseno ou a tangente de ângulos maiores que 90°, usamos as regras de sinais e a seguinte equivalência de ângulos:



F_π**-** Quanto falta para 180°.

P**-** Quanto passou de 180°.

$F_{2\pi}$**-** Quanto falta para 360°.

Vejamos alguns exemplos:
Exemplos:

1. Calcule sen 300°.
   Como 300° está no quarto quadrante, o ângulo correspondente é 60° (pois é o que falta para 360°) e o seno é negativo. Portanto
   $$\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
2. Calcule $\cos 225°$.
   Como 225° está no terceiro quadrante, o ângulo correspondente é 45° (pois é o que passou de 180°) e o cosseno é negativo. Portanto
   $$\cos 225° = -\text{sen } 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Calcule $\tan 510°$.
Como 510° é 360°+150°, então o ângulo dá uma volta no ciclo e para no segundo quadrante. Portanto, o ângulo correspondente é 30° (pois é o que falta para 180°) e a tangente é negativa. Portanto

$$\tan 510° = -\tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

IV. Relações Trigonométricas

1. $\text{sen }(a \pm b) = \text{sen } a \cos b \mp \text{sen } b \cos a$
2. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \pm \text{sen } a\text{sen } b$
3. $\text{sen }(2a) = \text{sen }(a + a) = 2\text{sen } a \cos b$
4. $\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos^2 a - \text{sen }^2 a$
5. $\text{sen }^2(a) + \cos^2(a) = 1$

V. Exercícios

1. Converta de radianos para graus
   (a) $\frac{\pi}{6}$
   (b) $\frac{7\pi}{3}$
   (c) 2
   (d) $1,3$

2. Encontre $\text{sen }\theta$, $\cos\theta$ e $\tan\theta$ para os ângulos dados:
   (a) -450°
   (b) 7π radianos
   (c) 135°
   (d) 240°
   (e) 330°

3. Encontre $\cos\theta$ se $\text{sen }\theta = \frac{1}{4}$ e $\tan\theta < 0$.

4. Se $\cos\theta = \frac{-5}{13}$ e $\tan\theta > 0$, então $\text{sen }\theta = ?$

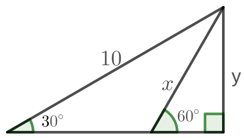
5. Sendo $\cos x = \frac{1}{m}$ e $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{m+1}}{m}$, determinar m.

6. Resolva as inequações, sabendo que $0 \leq x \leq 2\pi$.
   (a) $\text{sen } x \geq \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$
   (b) $\cos x > 0$

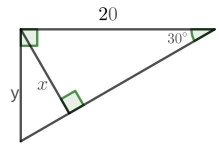
7. Determinar o domínio das funções, definida em $0 \leq x \leq 2\pi$
   (a) $f(x) = \sqrt{\text{sen } x}$
   (b) $g(x) = \sqrt{2\cos x - 1}$

8. Determine os valores de x e y nos triângulos abaixo.

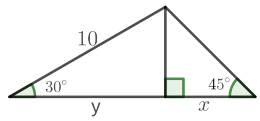
a)



b)



c)



9. Determine a altura de um painel de propaganda situado no topo de um edifício, sabendo-se que o observador está situado a 100 m do edifício e pode visualizar a base inferior e superior segundo um ângulo de 30° e 45° respectivamente.

10. Do alto de um farol, cuja altura é de 20 m, avista-se um navio sob um ângulo de depressão de 30°. Qual é a distância entre farol e o navio aproximadamente?

11. Mostre que $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \text{sen } x}$ é equivalente a $1 + \text{sen } x$ para $\text{sen } x \neq 1$.

12. Mostre que a expressão $\dfrac{\text{sen }(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\tan(\pi - x)}$, em que $\tan(\pi - x) \neq 0$, é equivalente a $2\cos x$.

13. Se $\cos(2x) = 0,2$, calcule $\tan^2 x$.