Centro Tecnológico de Joinville
Campus de Joinville

Curso de Pré-Cálculo 2020/1

Aula 03 (Produtos Notáveis, Fatoração, Divisão de Polinômios)

Produtos Notáveis:

1. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
4. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
5. $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$
6. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
7. $(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$

Exemplos:

a)
$$\begin{aligned} 25x^2 - 36 &= (5x)^2 - 6^2 \\ &= (5x+6)(5x-6). \end{aligned}$$

b) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x-4)(x^2+4x+16)$.

Fatoração:

Fatorar um polinômio significa reescrevê-lo como produto de outros polinômios.

Exemplo: Fatore os polinômios:

a) $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$.

b) $x^2 + 5x - 24 = (x-3)(x+5)$.

c) $2x^2 - 3xy - 4x + 6y = (x-2)(2x-3y)$

Operações com Expressões Algébricas:

Simplificações:

Exemplo:

$\frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x+3}$,

para $x \neq \pm 3$.

Redução ao mesmo denominador:

Exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2-4} &= \frac{2}{x(x-2)} + \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{2(x+2)+(x-2)(x+2)-3x}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2x+4+x^2-4-3x}{x(x^2-4)} \\ &= \frac{x^2-x}{x(x^2-4)} = \frac{x(x-1)}{x(x^2-4)} = \frac{x-1}{x^2-4} \end{aligned}$$

para $x \neq 0, \pm 2$.

Divisão de Polinômios - Método da Chave:

Dados dois polinômios $A(x)$ e $D(x)$, com $gr(A) \geq gr(D)$, não nulos, dividir $A(x)$ por $D(x)$ é obter dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ que satisfazem as seguintes condições

$$\begin{array}{l|l} A(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

isto é, $A(x) = D(x)Q(x) + R(x)$, com $R(x) = 0$ ou $gr(R) < gr(D)$.

Nomenclatura:
$A(x)$: dividendo
$D(x)$: divisor
$Q(x)$: quociente
$R(x)$: resto
$gr(A)$: grau do polinômio A(x).

Exemplo: Calcule o quociente e o resto da divisão de $A(x) = 6x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 2x + 8$ por $D(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 2x + 8 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^5 + 9x^4 - 3x^3} & 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4 \\ 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 8 & \\ \underline{-6x^4 + 9x^3 - 3x^2} & \\ 6x^3 - x^2 - 2x + 8 & \\ \underline{-6x^3 + 9x^2 - 3x} & \\ 8x^2 - 5x + 8 & \\ \underline{-8x^2 + 12x - 4} & \\ 7x + 4 & \end{array}$$

Observação: Sejam $A(x)$ um polinômio e x_0 tal que $A(x_0) = 0$, então dizemos que x_0 é raiz de $A(x)$.

Teorema: Dada a equação polinomial com coeficientes inteiros

$$a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Sejam p os divisores de a_0 e q os divisores de a_n. As possíveis raízes racionais são dadas pela razão $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Teorema do Resto: Se x_0 é raiz do polinômio $A(x)$, então $A(x)$ é divisível por $(x - x_0)$.

Exemplo: Encontre as possíveis raízes racionais do polinômio $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ e em seguida use o o Método da Chave para fatorar o polinômio $A(x)$.

Temos que os divisores de -2 são $1, -1, 2,$ e -2, os divisores de 1 são 1 e -1. Logo pelo Teorema anterior, os candidatos são:

$$1, -1, 2 \text{ e } -2.$$

Observe que $A(1) = 0$.
Assim $x_0 = 1$ é raiz de $A(x)$ e portanto $A(x)$ é divisível por $x - 1$, isto é,

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 2x^2 - x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3 + x^2} & x^2 + 3x + 2 \\
3x^2 - x - 2 & \\
\underline{-3x^2 + 3x} & \\
2x - 2 & \\
\underline{-2x + 2} & \\
0 &
\end{array}$$

Logo $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$

Análise do termo $x^2 + 3x + 2$.
Repetindo o procedimento para encontrar as possíveis raízes inteiras obtemos que $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$ são raízes de $x^2 + 3x + 2$, assim
$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$.

Portanto $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

<u>Exercícios:</u>

1. Fatore as expressões colocando o fator comum em evidência:

   a) $5x - 15$ b) $5x^3 - 20x$ c) $yz^3 - 3yz^2 + 2yz$

   d) $x^{-\frac{5}{3}}y^3 - x^{-\frac{2}{3}}y^2$ e) $x^{p+q} + x^p$

   f) $6x^2(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + x^3(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}6x$

2. Fatore usando os produtos notáveis:

   a) $z^2 - 49$ b) $16 - (x + 2)^2$ c) $36y^2 + 12y + 1$

   d) $y^3 - 8$ e) $z^3 + 64$ f) $x^2 - 5x - 14$

3. Fatore completamente:

   a) $x^3 + x$ b) $4y^3 - 20y^2 + 25y$

   c) $2x^3 - 16x^2 + 14x$ d) $2x^2 - 3xy + y^2$

4. Fatore e simplifique as expressões:

   a) $\frac{y^3+4y^2-21y}{y^2-49}$ b) $\frac{3}{x^2+3x} - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2-9}$

   c) $\frac{x+3}{x-1}\frac{1-x}{x^2-9}$ d) $\frac{a^{2x+2}-100}{a^{x+1}+10}$

   e) $\frac{(x+y)^2-z^2}{(x+y)-z}$ f) $\frac{y^3+4y^2-21y}{y^2-49}$

5. Mostre que a expressão

   $$a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^3y$$

   pode ser escrita como

   $$(a^2 - ax + x^2)(x - 2y).$$

6. Fatore as expressões usando o Método da Chave:

   a) $x^3 - 6x^2 + 32$ b) $2x^3 - x^2 - 18x + 9$

7. Simplifique a expressão

   $$\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{(x^2 - 9)(x^2 - 4)}.$$