UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Joinville

Curso de Nivelamento em Matemática Básica

Aula 02

I. Potenciação

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$. Calcular a potência n de um número real a equivale a multiplicar a, por ele mesmo, n vezes. A notação da operação de potenciação é equivalente a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

Exemplos:

1. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
2. $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$
3. $9^1 = 9$

Propriedades:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad a \neq 0$
3. $a^0 = 1$
4. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
5. $a^{m^n} = a^{\overbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}^{n \text{ vezes}}}$
6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
8. $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}; \quad b \neq 0$

Exemplo: Simplifique as expressões abaixo utilizando as propriedades listadas acima.

1. $\left(2x^4\right)^3 = 2^3\left(x^4\right)^3 = 2^3 x^{4\cdot 3} = 8x^{12}$
2. $\dfrac{2a^{-5} \cdot b^{-5}}{b^{-6} \cdot a^3} = 2a^{-5-3} \cdot b^{-5-(-6)} = 2a^{-8} \cdot b = \dfrac{2b}{a^8}$, $a, b \neq 0$
3. $\left(\dfrac{x^4}{x^4 \cdot y^2}\right)^3 = \left(x^{4-4} \cdot y^{-2}\right)^3 = 1^3 \cdot y^{-6} = \dfrac{1}{y^6}$, $x, y \neq 0$

II. Radiciação

Definição. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, $a, b \in \mathbb{R}$..*

A expressão $\sqrt[n]{a}$ é chamada raiz n-ésima de a, enquanto n e a são denominados índice e radicando, respectivamente.

Propriedades:

1. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{b}$
4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = u$
5. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m; \quad m \neq n$
6. $\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u|; \text{ se n é par} \\ u; \text{ se n é ímpar} \end{cases}$

Exemplo: Simplifique as expressões abaixo utilizando as propriedades listadas acima.

1. $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{2^4 5} = \sqrt[4]{2^4}\sqrt[4]{5} = 2\sqrt[4]{5}$
2. $\sqrt[4]{x^4 y^4} = \sqrt[4]{(xy)^4} = |xy|$
3. $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}}{y^3}} = \dfrac{\sqrt[3\cdot 2]{x}}{\sqrt[3]{y^3}} = \dfrac{\sqrt[6]{x}}{|y|}, \quad y \neq 0$

III. Soma e subtração de radicais

As propriedades listadas na seção anterior nos permitem multiplicar e dividir radicais, no entanto, só podemos realizar a adição e subtração de radicais semelhantes, ou seja, que apresentam índices e radicandos iguais.

Exemplo:

1. $3\sqrt[3]{5} + 7\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} = 9\sqrt[3]{5}$
2. $\sqrt[5]{x} - \sqrt{x} + 2x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x} - \sqrt{x} + 2\sqrt[5]{x} = 3\sqrt[5]{x} - \sqrt{x}$

Nos casos em que os radicais não são semelhantes, devemos utilizar a técnica da fatoração antes de realizar as operações de adição e subtração

Exemplo:

1. $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
2. $\sqrt{27} - \sqrt{48} = \sqrt{3^2 \cdot 3} - \sqrt{2^4 \cdot 3} = -\sqrt{3}$
3. $3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{24} = 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3}$
4.

IV. Racionalização

Considere a expressão $\dfrac{u}{\sqrt[n]{a^k}}$. Para eliminar o radical do denominador podemos fazer o seguinte procedimento:

$$\frac{u}{\sqrt[n]{a^k}} = \frac{u}{\sqrt[n]{a^k}}\frac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-k}}} = \frac{u\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^n}}$$

Sabendo que

$$\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u|; \text{ se n é par} \\ u; \text{ se n é ímpar} \end{cases},$$

observe que o denominador não está mais dependendo da raiz.

Exemplos:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
2. $\sqrt[5]{\dfrac{x^2}{y^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}}\dfrac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{(xy)^2}}{\sqrt[5]{y^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{(xy)^2}}{y}$.

V. Expoentes Racionais

Seja $u \in \mathbb{R}$, e $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Então $\sqrt[n]{u^m} = u^{\frac{m}{n}}$.

Simplificação de Expressões com Potências:

Exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2y^9)^{\frac{1}{3}}(xy^2)}{xy} &= \frac{(x^{\frac{2}{3}}y^3)(xy^2)}{xy} \\ &= (x^{\frac{5}{3}}y^5)(x^{-1}y^{-1}) = x^{\frac{2}{3}}y^4. \end{aligned}$$

Simplificação de Expressões com Radicais:

Exemplo:

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2y} - \sqrt{y^3} &= \sqrt{(2x)^2y} - \sqrt{y^2y} \\ &= 2|x|\sqrt{y} - |y|\sqrt{y} \\ &= \sqrt{y}(2|x| - |y|). \end{aligned}$$

VI. Exercícios

1. Simplifique as expressões utilizando as propriedades apresentadas.

   a) $\dfrac{8x^2y^5}{2(x^2y)^3}$ b) $\dfrac{\left(x^{\frac{3}{2}}y^{-2}\right)^{-2}}{x^3y^4}$

   c) $\dfrac{5m^2}{7n^3} \div \dfrac{10m^4}{14an^4}$ d) $\left(\dfrac{-4\cdot 8^2}{2^3\cdot 4^4}\right)^3$

   e) $\left(x^{-2}y^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \left(x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}\right)^2$ f) $\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}y^2z}{x^2yz^{-\frac{1}{2}}}$

   g) $\sqrt{20x^3y^4z^5}$ h) $\sqrt[3]{8x^3(x+y)^6}$

   i) $\sqrt[4]{\dfrac{48x^6y^7}{z^4}}$ j) $\sqrt{\sqrt[3]{3^7}}$

   k) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{9b^{10}}}$ l) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[6]{5^{10}}}{\sqrt[3]{5^2}}}$

   m) $\sqrt{3xy^2}\cdot\sqrt{6x^2y^3}$ n) $\sqrt[3]{-\dfrac{8x^6}{27y^2z^{12}}}$

   o) $\left(\sqrt[12]{3^4}\right)^3$ p) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{y^3}}}\right)^2$

2. Simplifique as somas/subtrações de radicais.

   a) $\sqrt{27} + 2\sqrt{12} - \sqrt{48}$

   b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{50} - \dfrac{1}{3}\sqrt{18}$

   c) $3\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{3}$

3. Racionalize o denominador:

   a) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

   d) $\dfrac{ab}{\sqrt{a}}$ e) $\sqrt[5]{\dfrac{a^3}{b^2}}$ f) $\dfrac{2xy}{\sqrt{xyz}}$