Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico de Joinville
Aula 5

Curso de Pré-Calculo UFSC-Joinville

Equações modulares, completar quadrados e equações algébricas.

Equaçẽs Modulares

O módulo de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 na reta real. Distâncias são sempre positivas ou zero, então:

$$|a| \geq 0 \qquad \text{para todo número } a.$$

Por exemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

Em geral, temos que

$$\begin{aligned} |a| &= a && \text{se} \quad a \geq 0 \\ |a| &= -a && \text{se} \quad a < 0 \end{aligned}$$

Exemplo 1: Expresse $|3x - 2|$ sem usar o símbolo de módulo.

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{se} \quad 3x-2 \geq 0 \\ -(3x-2) & \text{se} \quad 3x-2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x-2 & \text{se} \quad x \geq 2/3 \\ 2-3x & \text{se} \quad x < 2/3 \end{cases}$$

Observação: Lembre-se, que o símbolo $\sqrt{\ }$ significa "a raiz quadrada de". Assim $\sqrt{r} = s$, significa que $s^2 = r$ e $s \geq 0$. Portanto a equação $\sqrt{a^2} = a$ nem sempre é verdade. Se $a < 0$ então $-a > 0$, e assim $\sqrt{a^2} = -a$ pois $(-a)^2 = a^2$. Consequentemente:

$$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \text{para todo } a.$$

Propriedades: Suponha que a e b são números reais quaisquer e n é um número inteiro. Então

(a) $|ab| = |a|\,|b|$

(b) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ para $b \neq 0$.

(c) $|a^n| = |a|^n$

(d) Suponha que $a > 0$, então $|x| = a$ se, e somente se, $x = \pm a$

Exemplo 2: Resolva $|2x - 5| = 3$.

Pela propriedade anterior, temos que $|2x-5| = 3$ é equivalente à

$$2x - 5 = 3 \qquad \text{ou} \qquad 2x - 5 = -3$$

Portanto $x = 4$ ou $x = 1$.

Exercício 1: Resolver os seguintes itens.

(a) $2|x+3| = 6$

(b) $2|x-3| + 5 = 4x$

(c) $|2x-4| = x-3$

(d) $|4x-6| = |3x+2|$

(e) $|2x-1| = 2|x+2|$

(f) $|5x-6| = x^2$

(g) $|2x+6| - |x+2| = 2$

(h) $|x+1| + |2x-1| = 3$

(i) $|x+1| - |x| = 2x+1$

(j) $|x^2-8| = 2x$

(k) $|x^2| = 2x$

(l) $|x^2-x-2| = 2x+2$

(m) $|x^2+5x-5| = 1$

(n) $|x^2-8x+13| = 1$

(o) $|x|^2 - 10|x| + 24 = 0$

(p) $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

(q) $|x^2+5x-5| = 1$

(r) $|x^2-3x| = 4$

(s) $|x^2+2x-3| = 2 + |x^2-x+2|$

Completar quadrado

Completar quadrado é uma técnica utilizada para esboçar graficos de parábolas ou integrar funções racionais. Completar quadrado significa reescrever uma quadrática $ax^2 + bx + c$ na forma $a(x+p)^2 + q$ e pode ser realizada seguindo os passos:

1. Colocar o número a em evidência apenas nos termos envolvendo x.

2. Somar e subtrair o quadrado da metade do coeficiente de x.

Em geral, temos

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x\right]+c\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)
\end{aligned}$$

Exemplo 3: Reescreva x^2+x+1 completando quadrado.

$$x^2+x+1=x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Exemplo 4: Reescreva $2x^2-12x+11$ completando quadrado.

$$\begin{aligned}
2x^2-12x+11 &= 2[x^2-6x]+11\\
&= 2[x^2-6x+9-9]+11\\
&= 2[(x-3)^2-9]+11 = 2(x-3)^2-7
\end{aligned}$$

Exercício 2: Completar quadrados.

(a) x^2-2x+7 **(b)** x^2+6x-1

(c) $6x^2-7x+3$ **(d)** $9x^2+6x+3$

Equações Algébricas

Exercício 3: Simplifique as expressões.

(a) $\dfrac{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}{1+\frac{a}{x}}$ **(b)** $\dfrac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}}$

(c) $\dfrac{1+\frac{2xy}{x^2+y^2}}{1+\frac{x}{y}}$ **(d)** $\dfrac{x-2}{x-\frac{1}{1-\frac{2}{x+2}}}$

(e) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$ **(f)** $(x+y-z)^2$

(g) $(x-2+z)^2$ **(h)** $\dfrac{\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}}$

(i) $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$ **(j)** $\dfrac{\frac{x^2-4y^2}{xy+2y^2}}{x^2-3xy+2y^2}$

(k) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{4x-2}{x^2-1}$

(l) $(x^2-3x+2)\cdot\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-6x^2+8x}$

Exercício 4: Resolva as equações.

(a) $\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x+2}=1$ **(b)** $(x-2)^2-(3-x)^2=1$

(c) $x+\sqrt{4x+1}=5$ **(d)** $\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}=5$

(e) $\sqrt[3]{2x-5}=3$ **(f)** $\dfrac{x+\frac{5}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{3x}{4}}=1$

(g) $\dfrac{5}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$

(h) $\sqrt{-2x^2+2x+1}=x$

(i) $\sqrt{4x-3}-\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-5}$

(j) $(x+1)^3-(x-1)^3=6x(x-3)$

(k) $a(x-a)-x=a(a+1)+1$