UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Joinville

Curso de Nivelamento em Matemática Básica

Aula 04

Definição. *Uma equação é uma representação matemática para a afirmação que duas expressões representam o mesmo valor numérico.*

Nota: Uma equação pode ser manipulada através da realização de operações algébricas idênticas em ambos os lados da equação.

Exemplos:

$$a = b$$
$$a + c = b + c$$
$$ac = bc$$
$$a/c = b/c \quad \text{onde } c \neq 0$$

Definição. *A* ***solução*** *de uma equação em x é um valor de x para o qual a equação é verdadeira.* ***Resolver*** *uma equação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a equação é verdadeira.*

Nota: A potenciação de ambos os lados pode gerar uma equação onde nem todas as soluções satisfazem a equação original:
Exemplos:
Equação original: $x = 2$
Elevando ao quadro: $x^2 = 4$ A segunda equação possui as solução $x = \pm 2$, enquanto a orignal somente $x = 2$.

I. Equação de primeiro grau

Definição. *Uma equação de primeiro grau em x é aquela que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$ onde a e b são números reais com $a \neq 0$.*
Observação: Sua resolução é
$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.
Na primeira passagem, somou-se aos dois membros $-b$; na segunda, dividiram-se aos dois membros por $a (a \neq 0)$.
Exemplos:
1) Resolva: $2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2$.
Solução:

$$\begin{aligned}
2(2x-3)+3(x+1) &= 5x+2 \\
4x - 6 + 3x + 3 &= 5x + 2 \quad \text{(p. distributiva)} \\
7x - 3 &= 5x + 2 \quad \text{(somando termos s.)} \\
2x &= 5 \quad \text{(somando -}5x\text{ e +3)} \\
x &= \frac{5}{2}. \quad \text{(dividindo por } 2 \neq 0\text{)}
\end{aligned}$$

2) Resolva: $\frac{5y-2}{8} = 2 + \frac{y}{4}$.
Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{5y-2}{8} &= 2 + \frac{y}{4} \quad (\text{mmc } \{8,4\} = 8) \\
8 \cdot \left(\frac{5y-2}{8}\right) &= 8 \cdot \left(2 + \frac{y}{4}\right) \text{(multiplicando por 8)} \\
5y - 2 &= 16 + 2y \text{ (Justifique)} \\
3y &= 18 \quad \text{(somando -}2y\text{ e +2)} \\
y &= 6. \quad \text{(dividindo por 3)}
\end{aligned}$$

II. Equação de segundo grau

Definição. *Uma equação de segundo grau em x é aquela que pode ser escrita na forma $ax^2+bx+c = 0$ onde $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.*

Resolução algébrica de equações quadráticas:
A equação de segundo grau pode ser resolvida geralmente usando a fórmula de Bhaskara. Observe o processo de completação de quadrados para obtê-la.
Considere a equação: $ax^2 + bx + c = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\
&\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{(Bhaskara)}
\end{aligned}$$

Exemplos:
4) Resolva: $3x^2 - 6x - 5 = 0$.
Solução: Veja que neste caso a=3, b=-6 e c=-5, logo usando a fórmula de Bhaskara temos

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{96}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{6}}{6} = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}
\end{aligned}$$

Assim $x_1 = \dfrac{3 + 2\sqrt{6}}{3}$ e $x_2 = \dfrac{3 - 2\sqrt{6}}{3}$.

5) Resolva a equação anterior completando quadrados e compare ambos os resultados:
Dividindo por 3 em ambos os lados temos:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x - \frac{5}{3} &= 0 \\
x^2 - 2x + 1 &= \frac{5}{3} + 1 \quad \text{(somando 5/3 e 1)} \\
(x-1)^2 &= \frac{8}{3} \\
x - 1 &= \pm\sqrt{\frac{8}{3}} \quad \text{(Justifique)} \\
\text{Assim } x_1 = 1 + \sqrt{\frac{8}{3}} &\text{ e } x_2 = 1 - \sqrt{\frac{8}{3}}
\end{aligned}$$

6) Resolva $2x^2 - 6x = 0$.
Solução:
Note que se $x_1 \cdot x_2 = 0$ **então** $x_1 = 0$ **ou** $x_2 = 0$,
$2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-3) = 0$.
Assim $2x = 0$ ou $x - 3 = 0$, logo $x = 0$ ou $x = 3$

III. Exercícios

1. Encontre os valores de x que satisfazem as equações abaixo:

   a) $x(x+3) = 5x + 3$
   b) $\frac{1}{2}(x-1) - (x-3) = \frac{1}{3}(x+3) + \frac{1}{6}$
   c) $\frac{3}{5} + \frac{3}{2x-1} = 0$
   d) $\frac{x-4}{8} - 5 = 0$
   e) $x + 3(x-1) = 6 - 4(2x+3)$
   f) $\frac{2x-3}{2} + \frac{-x+1}{5} = \frac{-x+5}{10}$
   g) $3x - \frac{25}{x} = \frac{x}{10} - \frac{7}{4}$
   h) $2 - \frac{x-1}{40} = \frac{2x-1}{4} - \frac{4x-5}{8}$

2. Encontre os valores de x que satisfazem as equações abaixo:

   a) $x^2 - 2x + 5 = 0$
   b) $4x^2 + 6x - 4 = 0$
   c) $-6x^2 + 25x = 0$
   d) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
   e) $7x^2 + 14 = 0$
   f) $5x^2 - 9 = 46$
   g) $(x+5)(x-5) = -7$
   h) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$
   i) $5x^2 = -3x$
   j) $4y^4 - 5y^2 + 1 = 0$
   k) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$
   l) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0$

3. Encontre os valores de x que satisfaçam as equações abaixo:

   a) $\frac{5}{x} - \frac{1}{x+2} = 0$
   b) $(x-2)^2 - (3-x)^2 = 1$
   c) $\sqrt{-2x^2 + 2x + 1} = x$
   d) $x + \sqrt{4x+1} = 5$
   e) $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = 5$
   f) $\sqrt[3]{2x-5} = 3$
   g) $\frac{x + \frac{5}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{3}{4}x} = 1$
   h) $a(x-a) - x = a(a+1) + 1$

4. Fórmule o problema através de uma equação e encontre sua solução:

   a) Uma torneira enche um depósito de água em 1/14 da hora enquanto uma válvula pode esvaziá-lo em 1/9 da hora. Trabalhando juntas, em quanto tempo o líquido contido no depósito atingir seus 5/6?
   b) O comprimento de um terreno é o dobro da sua largura. Se o comprimento é aumentado em 40 m e a largura se aumenta em 6 m, a área se duplica. Encontre as dimensões do terreno.
   c) O comprimento de um navio, que é de 461 pés, é onze pés maior que nove vezes a largura. Encontre a largura.

Bibliografia:

Demanda, F. D.; Waits, B. K.; Foley, G. D.; Kennedy, D. **Pré-Cálculo.** São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. Cap. 11 e 12.